Quand'esso si verifica, l'equazione (io) dell'art. II è soddisfatta indipendentemente dalla funzione F: dunque le rette del sistema corrispondente sono normali ad una medesima superficie. Inoltre le equazioni (29) esprimono evidentemente che *X,* 7, *Z* sono le derivate parziali di una stessa funzione <p di *x9 y, %.* Questa funzione è tale che soddisfa all'equazione

/ N

(30)

e che, eguagliata ad una costante arbitraria, definisce la serie delle superficie ortogonali alle rette del sistema. Siccome queste superficie sono parallele fra loro, così i va-

lori delle derivate -—-, -—-, ^~- non cambiano quando il punto (#, *y,* ^) si muove *cf oc* 0 *y* 0 ir

lungo una normale, cioè quando le coordinate x, y_y *%* si mutano in *x-\-tX, y* -f- *tY, 7i~\-tZ:* il che conferma quanto abbiamo osservato al principio. Del resto questo parallelismo, che noi deduciamo *a priori* dalla natura della questione, si può stabilire in modo diretto come segue. Rappresentiamo con x_0, $y_{Q)}$ $^_0$ le coordinate del punto d'incontro della normale alla superficie <p = cost., nel punto (x, *y,* ^), colla superficie cp = o, e con *n* la distanza di questi due punti ; avremo, per la (30),

da cui

$(x — x_0)\&x + (y — y_0$

riferendo la caratteristica 8 ad uno spostamento nel senso della normale *n.* Ma d'altra parte si ha anche

dunque S<p=Sn, ed, integrando lungo la normale, <p = n_y poiché *n* deve annullarsi per cp = o. Questo risultato si può enunciare dicendo che *: se <p è una soluzione qualunque dell'equazione* (30), *il valore che questa funzione riceve per un cerio sistema di valori* (V, y'_y £') *delle variabili* x_y y, ^, *misura la distanza della superficie*

cp(x, y, O = ?(*'>

>'', O *superficie*

consegue che tutte le superficie contenute nell'equazione 9 = cost. *sono parallele fra loro* *). Ora qualunque sia la superficie iniziale da cui escono le rette *(X_y* F, Z), se

*) L'equazione (30), che definisce il parallelismo delle superfìcie, fu data da BORDONI, nella Memoria citata all'art. IV.